

大学数学中的理性蜕变与思维范式转换

朱奕粼

西南大学数学与统计学院 重庆市北碚区 400700

摘要: 大学数学的学习是一场深刻的认知范式革命,更是一场思维方式的根本蜕变。本文着力探讨推动认知转变的关键契机与内在动力,系统阐述思想性认知逐步确立后的核心表现,包括对数学知识结构性的整体把握、对数学思想方法普适性的领悟以及数学活动中创造性的凸显,并有力论证这一认知转变对于学习者批判性思维、抽象建模能力以及跨学科创新素养培养所具有的深远而持久的影响。

关键词: 大学数学; 认知转变; 工具性; 思想性; 数学思维; 逻辑训练

引言

当我们带着中学时期养成的数学思维踏入大学数学的殿堂时,内心都会经历一种强烈的认知冲突。大学数学,无论是微积分、线性代数还是高等代数,都与我们所熟悉的数学明显不同,它不再是一系列明确公式的集合,也不再是拥有清晰解题套路的问题集,而是由严格定义、基本公理、核心定理和严谨证明构筑起来的“抽象森林”,初入其中,方向感完全迷失。大学数学的内容与方法,尤其是数学分析中基于 $\varepsilon - \delta$ 语言的极限定义、线性代数中高度抽象的向量空间与线性变换概念,以及实变函数、抽象代数等后续课程,都对这种浅层的工具性认知构成了强有力的冲击。它们迫使我们回答一些根本性问题——为什么这个定义如此表述?这个定理为何必然成立?本文深入探讨的,正是大学数学学习过程中所必然经历或应当追求的这场“从工具到思想”的认知转变。这是一场思维方式的重构与理性精神的深度启蒙,是大学数学教育赋予我们最为核心的宝贵财富。理解这一转变的过程与机制,不仅有助于我们更好地学习数学本身,更能让我们洞见高等教育在人的理性素养塑造中所扮演的关键角色。

一、工具性认知的阶段特征与内在局限

刚开始接触大学数学时,我的认知模式仍停留在“工具性”层面,我想,这种学习模式在短期内是无法改变的,因为在长期以应试为导向的数学学习环境中,数学学习的最高目标,就是快速、准确地求解出特定问题的答案,最终在考试中获得理想的分数,所以,我们学习的重心,我们努力的方向,自然而然地倾向于对各类解题技巧的熟练和模仿。当然,学生们热衷于在学习中搜集、归纳“典型题型”及其对应的“标准解法”,仿佛数学知识体系是一个庞大且条目分

明的工具箱,遇到任何问题,只需根据标签寻找出那件预设好的工具即可。例如,在求导或积分运算时,工具性认知的思维点几乎完全集中于熟记各类基本初等函数的求导公式与积分公式,掌握换元积分法、分部积分法等解题技巧,对于“导数”作为瞬时变化率的极限本质,对于“积分”作为无限分割求和极限的深刻几何与物理意义,缺乏深入探究的源动力。工具的价值在于其可用性和有效性,至于其原理与由来,常被视为次要甚至不必要的知识。

其次,工具性认知常常把数学知识体系看作一系列静态的、彼此之间相对孤立的事实结论与运算法则的集合。即使学生熟练地背诵了拉格朗日中值定理的经典表述,甚至能够准确地应用于证明不等式,却未必真正理解这一定理作为沟通函数在区间上的整体平均变化率与区间内某点瞬时变化率之间桥梁的深刻哲学意义;同样,学生可能学会了如何计算一个方阵的特征值和特征向量,却未必能领会其在描述线性变换作用下“不变方向”与“伸缩倍数”方面的强大直观背景与核心功能。这种认知模式下的知识结构是零散的、浅表的,知识点之间缺乏有机的、逻辑上的紧密联系,如同散落一地的珍珠,虽然每一颗都光彩夺目,却因缺少一根主线而无法串联成协调统一的项链。所以,当学习者面对综合性较强、背景新颖或无法直接归类到已知题型的问题时,往往感到束手无策,因为其熟悉的“工具箱”里,找不到一件能够完全匹配眼前问题的现成工具,这种挫折感,恰恰暴露了工具性认知的内在局限性。

在中学阶段,由于知识难度和教学目标的限制,许多数学结论的接受更多地依赖于直观理解、几何验证或特例检验,而大学数学将逻辑的严密性置于至高无上的地位,那个起初令人生畏的 $\varepsilon - \delta$ 语言,正是为了以精确无误的逻辑方式,彻

底消除“无限接近”等直观描述中可能存在的模糊性与歧义性，对于持有工具性认知的学生而言，这套语言系统显得烦琐而抽象，他们关心的是“如何用公式算出结果”，而不是“为什么这个定义能确保逻辑的严密性”，证明过程被视为需要记忆的额外负担，而非理解定理何以成立的必然路径。

二、 认知转变的关键契机与推动力量

从相对肤浅和功利化的工具性认知，转向更为深刻和结构化的思想性认知，更像是一个渐进的、由若干关键的学习体验和思想触动持续引发的蜕变，这些契机如同思维道路上的灯塔，一次次地照亮学习者通往数学思想殿堂的深处。

中学数学因其教学的接受程度与阶段性目标，对核心概念（如极限、连续）进行了高度直观化的处理。而大学数学，尤其是数学分析课程，其首要任务之一就是重建逻辑的严密性基石。以极限的 $\varepsilon - \delta$ 定义为例，初读确实拗口，它以一种近乎冷酷无情的逻辑精确性，彻底消除了动态描述“无限逼近”可能带来的任何歧义，为微积分大厦奠定了坚实可靠的基础。当学习者尝试主动运用它证明“两个函数的和之极限等于极限之和”这样基本的命题时，第一次真切地感受到逻辑链条不容置疑的力量——每一个看似微小的推论，都必须由明确无误的定义和已经证明为真的命题，经过严格的逻辑规则推导出来。这种经历是震撼性的，它强烈冲击了以往依赖直观感觉、几何验证或机械模仿的学习习惯，迫使学习者将注意力从“如何计算出答案”（How）的根本性转向“为什么这个结论成立以及为何这样定义是合理的”（Why）。对严谨性的追求，内化为一种思维的必要品质。

另一个重要的推动力，来源于对数学理论体系“内在自治性”与“结构美感”的发现与欣赏。当学习者跟随教师的引导或通过自主阅读，一步步看到如何从少数几条简洁明了、近乎不证自明的基本公理（如皮亚诺算术公理、向量空间公理）出发，通过纯粹的逻辑演绎，像搭建积木一般，依次推导出引理、命题、定理，最终构建起一个庞大、复杂而又环环相扣、巍峨壮丽的数学理论体系时，他们会获得一种前所未有的愉悦与满足。

此外，大学数学教科书通常以高度凝练、逻辑化的方式呈现，如果学习者能够有机会了解微积分创立最初，是如何源于牛顿和莱布尼茨对求解瞬时速度、曲线切线以及求积等物理学与几何学问题的迫切需求；了解“函数”概念本身是如何从最初模糊的“曲线”观念，历经欧拉、狄利克雷等人

的不断批判与澄清，才演变为今天建立在集合映射基础上的精确定义，那么，这些看似天外来客般的抽象定义和定理就会立刻变得鲜活起来，具有了历史的温度和实践的根基。

最后，学习过程中遇到的挑战与困惑本身，也常常成为转变的契机。当工具性的方法在面对证明题、抽象概念题失效时，当固有的思维模式无法理解一个反直觉的数学结论（如“部分可能与整体一样多”的无限集合性质）时，这种认知冲突会迫使学习者进行深刻的反思，审视自己原有认知框架的不足，从而为接受新的、更强大的思想框架打开大门。

三、 思想性认知的核心内涵与主要表现

当认知转变积累到一定程度，量变引起质变，学习者在数学学习中会逐渐确立一种全新的、更为成熟的认知模式，即思想性认知。这种认知模式内涵丰富，并在多个维度上表现出与工具性认知截然不同的特征。

思想性认知的核心特征，是对数学知识“结构性”与“关联性”的整体性把握和深刻理解。学习者致力于理解整个数学理论，甚至不同数学分支之间的内在逻辑结构与有机联系。他们习惯于将所学内容构建成一个层次分明、联系紧密的网络状知识体系。例如，在线性代数的学习中，思想性认知的表现是，能够清晰地认识到向量空间、子空间、维数、基、线性变换、特征值、特征向量、对角化等核心概念并非彼此孤立的名词，而是构成一个描述“线性”关系宏大图景的不同侧面和环节。他们会理解，求解一个具体的线性方程组问题，其本质是在特定的有限维向量空间和选定的坐标系（基）下，研究一个线性变换的性质及其作用结果。而矩阵，不过是线性变换在给定基下的一个具体表示而已。这种结构性的理解，使得知识点不再是散落的碎片，而是形成了具有内在逻辑关联的、可迁移的、具备强大应用潜力的知识网络。

其次，思想性认知提升了对数学思想方法“普适性”与“迁移性”的领悟能力。在这一认知层次上，数学不再被狭隘地理解为仅仅是关于数量关系和空间形式的科学，它更本质地是一门关于模式、关系、结构和逻辑的科学。概率论中的随机性与统计规律思想，可以超越赌博和保险，用于理解金融市场波动、社会现象中的不确定性甚至量子力学的基本原理；优化理论中的价值思想，可以普遍地指导经济学中的最优化决策、工程设计中的参数寻优以及机器学习中的模型训练；群论中对对称性和不变性的深刻刻画，不仅可以用于分析晶体结构、分子振动，更成为现代物理学基本粒子理论的

核心語言。當學習者真正掌握了“映射”或“函數”這一基本思想，他們就能在中學的函數概念、線性代數中的線性變換、抽象代數中的群同態乃至拓撲學中的連續映射等不同數學分支的、抽象層次各異的概念之間，看到其共通的“對應”思想精髓。這種對數學基本思想方法的提煉、抽象和遷移能力，使得數學真正成為連接不同學科領域的通用語言和強大的思維範式，是其作為“思想”而非“工具”的核心價值體現。

在思想性認知中，學習成為一個包含積極探索、策略選擇、思路構思乃至發現創新的過程。學習者開始欣賞一道數學題目背後可能蘊含的各種解法，並樂於比較不同解法背後所體現的思想精髓的異同，評判其優劣與適用條件。例如，在嘗試證明一個關於數列收斂性的命題時，思想性認知的學習者不會滿足於背誦證明步驟，而是會思考為什麼需要利用到實數的完備性，為什麼這樣的證明構造是有效的，是否有其他不同的證明思路能揭示問題的不同側面。這種創造性的參與感，是思想性認知帶來的最高層次的愉悅之一。

思想性認知不會盲目接受任何未經嚴格論證的結論，它會主動審視定義是否合理、定理證明是否存在漏洞、不同理論之間是否存在內在矛盾。這種批判性思維不僅是深入理解數學的保障，也是數學精神向外輻射，影響個體在其他領域思維方式的重要橋樑。

四、認知轉變對個人發展的深遠影響

這場靜悄悄的革命，深刻地重塑着學習者的思維方式、問題解決能力乃至世界觀，對其綜合素養的培育與未來長遠發展具有奠基性的、持久的作用。這種思維習慣會遷移到學習、工作和生活的方方面面。

大學數學本質上是關於抽象化的極致訓練，它不斷地教會我們如何剝離紛繁複雜的現實問題或具體數學對象的各種非本質細節、次要屬性，直指其內在的、核心的數學結構（如數量關係、空間形式、序結構、代數結構等）。這種“透過現象看本質”的能力，是進行理論創新和解決複雜系統性問題的關鍵。無論是在計算機科學中設計與分析算法，在經濟學中構建和求解理論模型，在工程學中進行系統分析與優化，甚至在哲學中進行邏輯分析，強大的抽象思維能力都是將現實世界或理論世界中的模糊問題，轉化為可精確刻畫、可邏輯推演、可計算處理的數學形式或理論模型的基礎。這種能力使得個體能夠應對高度複雜和不確定性的環境。這一深刻

的認知轉變為跨學科學習、交叉研究與創新提供了堅實的思維基礎和方法論準備。

結語

回顧大學數學的學習歷程，從最初將數學主要視為解決具體問題的實用工具，到逐漸領悟其作為人類理性思維精髓與強大思想體系的深層本質，這一認知轉變無疑是這段旅程中最具價值、最為深刻的收穫。但並非每個學習者都能完全地、徹底地實現這一轉變，但朝向這個方向的每一分努力、每一次對“何以如此”的深入追問，都在潛移默化地影響着我們的思維品質，提升着我们的理性高度。大學數學教育的根本目的與崇高使命，或許正根植於此——它不僅是傳授一系列數學知識和技巧，更是要“授人以漁”，通過數學這一古老而常新的學科載體，培養出一種能夠貫穿學習者終身、助力其有效應對未來萬變世界的批判性思維能力、抽象思考能力與不懈探索的理性勇氣。

參考文獻

- [1] 張莫宙，宋乃慶. 數學教育概論[M]. 北京：高等教育出版社，2004.
- [2] [美]莫里斯·克萊因. 古今數學思想[M]. 張理京，張錦炎，江澤涵，譯。上海：上海科學技術出版社，2014.
- [3] [美]G. 波利亞. 怎樣解題——數學思維的新方法[M]. 涂泓，馮承天，譯。上海：上海科技教育出版社，2007.
- [4] 徐利治. 數學方法論選講[M]. 武漢：華中科技大學出版社，2000.
- [5] [美]威廉·鄧納姆. 天才引導的歷程——數學中的偉大定理[M]. 李繁榮，李莉萍，譯。北京：機械工業出版社，2013.